Isometrie del piano

Marina Cazzola

10 agosto 2020

Questo documento, ad uso degli studenti del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università di Milano-Bicocca, integra, con l'ausilio di strumenti multimediali, i temi trattati nel libro di testo

> *M. Cazzola, Matematica per Scienze della Formazione Primaria, Carocci, 2017.*

La prima parte di questo documento permette di rivedere i contenuti del Capitolo 16, integrandolo con materiali interattivi.
La seconda parte di questo documento, completa la dimostrazione della classificazione delle isometrie del piano, solo parzialmente presente nel libro di testo.

1 Che cosa è una isometria?

Questo è il modo in cui definiamo le isometrie del piano

Definizione 1

Una trasformazione del piano f è una **isometria** se qualunque sia la coppia di punti P e Q nel piano, la distanza tra P e Q è uguale alla distanza tra $f(P)$ e $f(Q)$.

Come si può vedere, si tratta di una definizione, che descrive una proprietà astratta di questo tipo di trasformazioni, proprietà che a prima vista sembra difficile da comprendere senza pensare a esempi specifici. Vedremo che questa proprietà, fondamentale nella caratterizzazione delle isometrie, è tutto quello che ci serve per mostrare alcune proprietà importanti di queste trasformazioni.

1.1 Proprietà delle isometrie

In questo paragrafo elencheremo le proprietà delle isometrie che possono essere dedotte direttamente dalla definizione appena data, cioè che seguono dall'unica proprietà:

> per *ogni* coppia di punti P e Q del piano, la distanza tra P e Q è uguale alla distanza tra $f(P)$ e $f(Q)$.

Proprietà 1

Se f è una isometria del piano e se P, Q e R sono tre punti allineati, allora $f(P)$, $f(Q)$ e $f(R)$ sono allineati.

Maggiori informazioni

Si tratta della Proprietà 16.1 del libro di testo (p. 413).

Proprietà 2

Se f è una isometria del piano e P, Q e R sono tre qualsiasi punti che individuano un angolo $\widehat{PQR}$, allora tale angolo è uguale all'angolo $f(P)\widehat{f(Q)}f(R)$.

Maggiori informazioni

Si tratta della Proprietà 16.2 del libro di testo (p. 414).

Proprietà 3

Se A, B e C sono tre punti non allineati e se f è una isometria, tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$, allora f è *l'unica* isometria del piano che manda A in A', B in B' e C in C'.

Maggiori informazioni

Si tratta della Proprietà 16.3 del libro di testo (p. 416).

È facile mostrare (esercizio!) che da queste proprietà, qualunque sia l'isometria f, seguono le proprietà elencate qui di seguito.

- Un qualsiasi segmento PQ ha come immagine il segmento $f(P)f(Q)$. Inoltre questi due segmenti hanno la stessa lunghezza in quanto $d(P,Q) = d(f(P), f(Q))$.
- Un qualsiasi triangolo PQR ha come immagine il triangolo $f(P)f(Q)f(R)$. Inoltre questi due triangoli sono congruenti perché hanno i lati corrispondenti nell'isometria uguali.
- Un qualsiasi poligono ha come immagine un poligono con lo stesso numero di lati. I due poligono sono inoltre congruenti e questo significa, tra le varie cose, che per esempio hanno la stessa area.
- Una qualsiasi circonferenza nel piano ha come immagine una circonferenza con lo stesso raggio.

1.2 Che cosa è la distanza tra due punti?

Dati due punti P e Q del piano, la linea più corta (di misura minore possibile) che unisce questi due punti è proprio il segmento PQ. Chiamiamo **distanza** tra P e Q la lunghezza del segmento PQ e indichiamo la misura di tale lunghezza con il simbolo $d(P,Q)$.

Maggiori informazioni

Questa idea sfrutta alcune nozioni viste in precedenza: l'idea di *misura* (si veda il Capitolo 11 del libro di testo) e l'idea di *segmento* come linea più breve che unisce due punti (si vedano il Paragrafo 13.1.2 e il Paragrafo 14.2 del libro di testo).

2 Quali isometrie del piano conosciamo?

È facile mostrare che la trasformazione identica o *identità*, cioè la trasformazione che a ogni punto P del piano associa il punto P stesso, è effettivamente una isometria.

Maggiori informazioni

Questo è mostrato nell'Esempio 16.1 del libro di testo.

Abbiamo tre tipi di isometrie per le quali possiamo descrivere una costruzione geometrica che dato un qualsiasi punto P del piano permette di determinare univocamente il punto $f(P)$.

2.1 Riflessione rispetto alla retta r

Fissata una retta r, la *riflessione rispetto a r* manda un qualsiasi punto P del piano nel punto P' avente le seguenti caratteristiche

- se $P \in r$ allora $P' = P$;
- se $P \notin r$, allora il punto P' è quell'unico punto per cui il segmento PP' è perpendicolare a r e il punto medio del segmento PP' appartiene a r.

Se vogliamo una scrittura abbreviata, posiamo indicare la riflessione rispetto alla retta r con il simbolo σ_r.

Maggiori informazioni

Si può confrontare la costruzione qui descritta con quella presente nell'Esempio 16.2 del libro di testo (p. 405), esempio in cui viene anche mostrato che la trasformazione così ottenuta è effettivamente una isometria. Può essere utile rivedere anche l'Esempio 16.3 e il Riquadro 16.1.

Esercizio interattivo 1

WIMS : Riflessioni: data una retta, e quindi definita univocamente una riflessione, determinare le immagini di alcuni punti del piano.

Maggiori informazioni

Per effettuare effettivamente la costruzione sulla carta a quadretti potrebbe essere utile rivedere il Paragrafo 15.1 del libro di testo.

Esercizio interattivo 2

Ecco una serie di esercizi analoghi al precedente

- WIMS : Riflessioni 1
- WIMS : Riflessioni 2
- WIMS : Riflessioni 3

Esercizio interattivo 3

WIMS : Riflessioni: dati due poligoni mandati l'uno nell'altro da una riflessione individuare la retta che caratterizza questa riflessione.

2.2 Rotazione di angolo α attorno a O

Fissato un angolo α e un punto O, la *rotazione di angolo* α *attorno a* O manda un qualsiasi punto P del piano nel punto P' avente le seguenti caratteristiche

- se $P = O$, allora $P' = O$;
- se $P \neq O$, allora il punto P' è quell'unico punto per cui l'angolo $\widehat{POP'}$ è uguale a α *anche nel verso* e il segmento PO è uguale al segmento $P'O$.

Se vogliamo una scrittura abbreviata, possiamo indicare la rotazione di angolo α attorno a O con il simbolo $\rho_{O,\alpha}$.

Maggiori informazioni

Per quel che riguarda l'idea di *verso* di un angolo, può essere utile rivedere l'Esempio 16.4 e il Riquadro 16.2 del libro di testo. Può anche essere utile rivedere l'esempio 16.5.

Esercizio interattivo 4

WIMS : Rotazioni: dati un angolo e un punto, e quindi definita univocamente una rotazione, determinare le immagini di alcuni punti del piano.

Maggiori informazioni

Per effettuare effettivamente la costruzione sulla carta a quadretti potrebbe essere utile rivedere i Paragrafi 15.1 e 15.2 del libro di testo.

Esercizio interattivo 5

Ecco un altro esercizio analogo al precedente

- WIMS : Rotazioni

Esercizio interattivo 6

WIMS : Rotazioni: individuare il centro di una data rotazione.

Esercizio interattivo 7

WIMS : Rotazioni: dati due poligoni mandati l'uno nell'altro da una rotazione individuare il centro di questa rotazione.

2.3 Traslazione di vettore v

Fissato un vettore $\mathbf{v}$, la *traslazione di vettore* $\mathbf{v}$ manda un qualsiasi punto P del piano in quell'unico punto del piano P' per cui il vettore da P a P' ha uguale lunghezza, direzione e verso del vettore $\mathbf{v}$.
Se vogliamo una scrittura abbreviata, possiamo indicare la traslazione di vettore $\mathbf{v}$ con il simbolo $\tau_{\mathbf{v}}$.

Maggiori informazioni

Nella definizione di traslazione è fondamentale l'idea di vettore, che potete trovare nel Riquadro 16.3 del libro di testo (in particolare è necessario descrivere che cosa significhi che due vettori hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso). Può anche essere utile rivedere gli Esempi 16.6 e 16.7.

Esercizio interattivo 8

WIMS : Traslazioni: dato un vettore, e quindi definita univocamente una traslazione, determinare le immagini di alcuni punti del piano.

Maggiori informazioni

Per effettuare effettivamente la costruzione sulla carta a quadretti potrebbe essere utile rivedere i Paragrafi 15.1 e 15.2 del libro di testo.

Esercizio interattivo 9

WIMS : Traslazioni: dati due poligoni mandati l'uno nell'altro da una traslazione individuare il vettore che caratterizza questa traslazione.

2.4 Altre isometrie?

Si pone il problema di capire se oltre alle tipologie di isometrie che abbiamo descritto ne possano esistere altre.

Domanda

Data una trasformazione del piano f che sappiamo essere una isometria, possiamo concludere che questa sia una delle tipologie che abbiamo descritto?

Esempio 1

Si veda l'animazione:

`https://www.geogebra.org/m/A7gdMppa#material/YvHJph25`

Mediante tale animazione è rappresentata una isometria: spostando il punto A nel piano viene mostrata la corrispondente immagine A' tramite questa isometria. Sapete individuare il tipo di isometria?

Esempio 2

Potete esplorare in modo analogo queste altre animazioni:

`https://www.geogebra.org/m/A7gdMppa#material/F2aR3Rzq` e
`https://www.geogebra.org/m/A7gdMppa#material/srQHjgBz`

Esercizio interattivo 10

WIMS : Tipo di isometria: data una isometria, capire di che tipologia è.

Suggerimenti

Nell'esercizio potrebbero effettivamente comparire tipologie di isometrie che ancora non conosciamo.

Maggiori informazioni

Per affrontare questo problema può essere utile utilizzare la proprietà 3.

2.4.1 Composizione di isometrie

Proprietà 4

Componendo due isometrie si ottiene ancora una isometria.

Maggiori informazioni

Paragrafo 16.3.3 del libro di testo.

Quando eseguiamo la composizione di isometrie abbiamo un problema analogo a quello appena visto che possiamo enunciare in questi termini:

Domanda

Date due isometrie f e g, possiamo capire che tipo di isometria è la loro composizione $f \circ g$?

Il caso più importante da ricordare è il caso in cui f e g sono due riflessioni, rispetto a due rette r e s rispettivamente. In questo caso infatti la composizione è una rotazione o una traslazione a seconda che le rette r e s siano incidenti o parallele. Potete esplorare queste due casistiche mediante le animazioni dei prossimi esempi.

Esempio 3

https://www.geogebra.org/m/t2zdymxu

Suggerimenti

Nell'animazione potete spostare i punti P, Q e R e vedere come variano le rispettive immagini P', Q' e R'. Potete anche spostare le rette che definiscono le riflessioni e esplorare così come varia l'isometria risultato della composizione di queste due riflessioni.

Maggiori informazioni

Si tratta dell'Esempio 16.10 del libro di testo.

Esempio 4

https://www.geogebra.org/m/hqef5bxj

Suggerimenti

Nell'animazione potete spostare i punti P, Q e R e vedere come variano le rispettive immagini P', Q' e R'. Potete anche spostare le rette che definiscono le riflessioni e esplorare così come varia l'isometria risultato della composizione di queste due riflessioni.

Maggiori informazioni

Si tratta dell'Esempio 16.11 del libro di testo.

Esercizio interattivo 11

WIMS : Composizione di isometrie: che isometria si ottiene componendo due isometrie?

Maggiori informazioni

Per affrontare questo problema può essere utile utilizzare la proprietà 3. Per effettuare effettivamente la costruzione sulla carta a quadretti potrebbe essere utile rivedere i Paragrafi 15.1 e 15.2 del libro di testo.

3 Che cosa significa *classificare* le isometrie del piano?

Se avete esplorato effettivamente l'esercizio 10 potreste esservi imbattuti in una isometria che non conoscete, come quella nell'esempio che segue.

Esempio 5

Si veda l'animazione:

`https://www.geogebra.org/m/A7gdMppa#material/kkDsBeyQ`

Mediante tale animazione è rappresentata una isometria: spostando il punto A nel piano viene mostrata la corrispondente immagine A' tramite questa isometria. Sapete individuare il tipo di isometria?

Il problema è quindi quello di descrivere una data isometria. In particolare, essendo una isometria una trasformazione del piano, per caratterizzare l'isometria è necessario saper assegnare univocamente a ogni punto del piano P la sua immagine P'.

Domanda

Data una isometria f, cioè una trasformazione di cui *sappiamo solo* che viene soddisfatta la condizione della Definizione 1, siamo in grado di descrivere una costruzione geometrica che permetta di associare a ogni punto del piano P la sua immagine P'?

La risposta a questa domanda è un risultato molto importante, perché permette di operare effettivamente con le isometrie, e la sua dimostrazione richiede di mettere assieme tutte le conoscenze fin qui costruite in una serie di passaggi, che ora vedremo.

3.1 Cosa sappiamo?

Riassumiamo alcune delle cose viste e integriamole con ulteriori osservazioni.
Sappiamo che l'identità *id* è una isometria e conosciamo altri tre tipi di isometrie

- σ_r: riflessione rispetto alla retta r;
- $\rho_{O,\alpha}$: rotazione attorno al punto O di angolo α;
- $\tau_{\mathbf{v}}$: traslazione di vettore $\mathbf{v}$.

3.1.1 Asse di un segmento

Definizione 2

Dati due punti distinti A e B nel piano, si chiama *asse* del segmento AB la retta perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio.

Potete verificare le seguenti proprietà di tale oggetto geometrico.

- L'asse del segmento AB è costituito da tutti e soli i punti del piano P tali che $d(A,P) = d(B,P)$.
- Se f è una riflessione e P è un punto tale che $P \neq f(P)$, allora indicando con r l'asse del segmento $Pf(P)$, si ha che $f = \sigma_r$.
- Se f è una rotazione e P è un punto tale che $P \neq f(P)$, allora il centro di f appartiene all'asse del segmento $Pf(P)$.

Maggiori informazioni

Potrebbe essere utile rivedere il Riquadro 16.5 del libro di testo (p. 407).

3.1.2 Composizione di isometrie e inversi

Abbiamo già ricordato che la composizione di due isometrie è ancora una isometria.

Proprietà 5

L'insieme formato da tutte le isometrie del piano è gruppo rispetto alla composizione di isometrie.

Maggiori informazioni

Potete trovare la definizione dell'oggetto matematico *gruppo* nel Capitolo 9 del libro di testo (si tratta della Definizione 9.2).

In particolare

Proprietà 6

Per la composizione di isometrie vale la proprietà *associativa*, cioè, qualunque siano le tre isometrie f, g e h, allora

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(Possiamo quindi scrivere questa serie di composizioni semplicemente come $f \circ g \circ h$, cioè omettendo le parentesi.)

Proprietà 7

L'identità id è l'elemento neutro per $\circ$ in questo gruppo, cioè se f è una qualsiasi isometria si ha

$$f \circ id = id \circ f = f$$

Proprietà 8

Ogni isometria ammette una isometria inversa. Cioè data una qualunque isometria f esiste una isometria $\widehat{f}$ tale che

$$f \circ \widehat{f} = \widehat{f} \circ f = id$$

Maggiori informazioni

Queste tre proprietà sono l'applicazione alle isometrie della Proprietà 9.1 del libro di testo.

Esplorando le isometrie che conosciamo, potete osservare che:

- $\widehat{\sigma_r} = \sigma_r$
- $\widehat{\tau_{\mathbf{v}}} = \tau_{-\mathbf{v}}$
- $\widehat{\rho_{O,\alpha}} = \rho_{O,-\alpha}$

Potete anche osservare le seguenti proprietà della composizione di isometrie:

- $\widehat{(f \circ g)} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$
- se $f \circ g = id$, allora $f = \widehat{g}$ e $g = \widehat{f}$

3.1.3 Equazioni

Il fatto di sapere che per la composizione di isometrie valgono le proprietà di gruppo ci permette di risolvere semplici equazioni. Per esempio se conosciamo due isometrie f e g e sappiamo che sono legate a una isometria x dalla seguente relazione:

$$f \circ x = g$$

allora si può *ricavare* x moltiplicando (a sinistra) per l'inverso di f in questo modo

$$\widehat{f} \circ (f \circ x) = \widehat{f} \circ g$$

da cui segue

$$x = \widehat{f} \circ g$$

Maggiori informazioni

Sapendo che abbiamo a che fare con un gruppo, possiamo utilizzare per le isometrie le tecniche per risolvere equazioni descritte nel Paragrafo 8.2 del libro di testo.

3.2 Punti fissi per una isometria

Definizione 3

Data una isometria f, diciamo che P è un *punto fisso* per f se $f(P) = P$.

Provate a analizzare le isometrie che conoscete e a descriverne i punti fissi.

Maggiori informazioni

Può essere utile rivedere l'Esempio 16.13 del libro di testo.

3.3 Isometrie con tre punti fissi

Vogliamo cominciare l'analisi delle possibili tipologie di isometrie del piano servendoci dell'idea di punto fisso e cominciando a andare a analizzare il caso in cui l'isometria abbia tre punti fissi. In realtà è utile e necessario precisare le ipotesi: ci chiediamo come sia fatta una isometria che possiede *almeno* tre punti fissi *non allineati*.

Domanda

Abbiamo una isometria f per cui sappiamo solo che esistono tre punti non allineati A, B e C nel piano tali che $f(A) = A$, $f(B) = B$ e $f(C) = C$ (cioè tale che i punti A, B e C siano fissi per f). Cosa possiamo dire su f?

Avendo specificato che i tre punti A, B e C in questione non sono allineati, è sufficiente applicare la proprietà 3 per concludere che $f = id$.

Maggiori informazioni

Trovate tutti i dettagli nell'Esempio 16.14 del libro di testo.

Suggerimenti

Cosa possiamo dire se togliamo l'ipotesi *non allineati*? E se ci chiediamo come sia fatta una isometria che ha *esattamente* tre punti fissi? Ha senso porsi la domanda di analizzare come sia fatta una isometria con quattro punti fissi?

3.4 Isometrie con due punti fissi

Il passo successivo è l'analisi delle isometrie con due punti fissi. Anche in questo caso precisiamo un po' meglio le ipotesi: ci chiediamo come sia fatta una isometria che possiede *almeno* due punti fissi *distinti*.

Domanda

Sia f una isometria per cui sappiamo solo che esitono due punti distinti A e B fissi per f, cioè tali che $f(A) = A$ e $f(B) = B$. Cosa possiamo dire su f?

Naturalmente questa casistica comprende anche il caso appena visto 3.3 e quindi f potrebbe essere l'identità id.

Ma f potrebbe essere una isometria diversa dall'identità. In questo caso, è facile verificare che se indichiamo con r la retta individuata dai punti A e B, allora f coincide proprio con σ_r.

Per vederlo, consideriamo un qualsiasi punto P del piano, non allineato con A e B, per cui $f(P) \neq P$ (possiamo sicuramente trovare un punto P così fatto, perché?). Allora, essendo f una isometria si ha che $d(A,P) = d(f(A), f(P))$, cioè

$$d(A,P) = d(A, f(P))$$

Questo significa che il punto A appartiene all'asse del segmento $Pf(P)$ (cfr. 3.1.1). Lo stesso ragionamento porta a concludere che il punto B appartiene all'asse del segemento $Pf(P)$. Ma allora l'asse del segmento $Pf(P)$ è proprio la retta r.

A questo punto, osservando il comportamento di f e di σ_r sui tre punti A, B e P possiamo concludere che f è proprio σ_r, sempre in virtù della proprietà 3.

Maggiori informazioni

Trovate tutti i dettagli nell'esempio 16.15 del libro di testo.

3.5 Isometrie con un punto fisso

A questo punto il passo sucessivo è l'analisi delle isometrie con un punto fisso.

Domanda

Sia f una isometria per cui sappiamo solo che esite un punto A fisso per f, cioè tale che $f(A) = A$. Cosa possiamo dire su f?

Potremmo essere in una delle casistiche precedenti, per cui f potrebbe essere l'identità ("tre" punti fissi) o una riflessione ("due" punti fissi). Quindi ci restano solo da studiare le isometrie che ammettono un unico punto fisso.

Sia quindi f una isometria che ammette come *unico* punto fisso il punto A. Se P è un qualsiasi punto del piano diverso da A, allora si deve avere che $f(P) = P' \neq P$. Chiamiamo r l'asse del segmento PP'. Dal momento che f è una isometria, abbiamo che

$$d(A,P) = d(f(A), f(P)) = d(A,P')$$

e quindi $A \in r$ (cfr. 3.1.1). Consideriamo la riflessione σ_r. Questa isometria si comporta in questo modo sui tre punti che stiamo considerando

$$A \mapsto A \qquad P \mapsto P' \qquad P' \mapsto P$$

Quindi quando componiamo f seguita da σ_r, l'isometria $\sigma_r \circ f$ si comporta in questo modo sui punti A e P:

$$A \overset{f}{\mapsto} A \overset{\sigma_r}{\mapsto} A \qquad P \overset{f}{\mapsto} P' \overset{\sigma_r}{\mapsto} P$$

Quindi $\sigma_r \circ f$ è una isometria con almeno due punti fissi, e ricade perciò in uno dei casi precedenti.

- $\sigma_r \circ f = id$, che ci porta a dire
  $$f = \widehat{\sigma_r} = \sigma_r$$
  e questo non può essere il caso nostro, in quanto f ha un solo punto fisso, mentre σ_r ne ha infiniti (vero?).

- $\sigma_r \circ f$ è una riflessione rispetto alla retta s che è proprio la retta passante per A e per P. Quindi $\sigma_r \circ f = \sigma_s$, da cui
  $$f = \widehat{\sigma_r} \circ \sigma_s = \sigma_r \circ \sigma_s$$
  Siccome le rette r e s passano entrambe per A, siamo nel caso in cui la composizione di riflessioni è una rotazione di centro A.

3.6 Il caso generale

I risultati fin qui ottenuti si possono riassumere in questo modo:

1. Se una isometria f del piano ha tre punti fissi non allineati, allora $f = id$.
2. Se una isometria f diversa dall'identità ha (almeno) due punti fissi e r è la retta individuata da questi due punti, allora $f = \sigma_r$.
3. Se una isometria f ha uno e un solo punto fisso, allora $f = \sigma_r \circ \sigma_s$ con r e s che si intersecano nel punto fisso (e quindi f è una rotazione).

Per arrivare al caso generale resta quindi aperta l'ultima casistica

Domanda

Che cosa possiamo dire di una isometria che non ha punti fissi?

Analizziamo quindi come può essere fatta una isometria f che non ha punti fissi. Se P è un qualsiasi punto del piano si deve avere $f(P) = P' \neq P$. Possiamo allora considerare l'asse del segmento PP', che chiamiamo t, e considerare la riflessione σ_t. Si ha

$$P \overset{f}{\mapsto} P' \overset{\sigma_t}{\mapsto} P$$

quindi P è un punto fisso per $\sigma_t \circ f$. Questo significa che siamo in una delle casistiche già viste, ovvero una delle seguenti:

1. $\sigma_t \circ f = id$
2. $\sigma_t \circ f = \sigma_r$
3. $\sigma_t \circ f = \sigma_r \circ \sigma_s$

Per tali casistiche si ha rispettivamente

1. $f = \sigma_t$
2. $f = \sigma_t \circ \sigma_r$
3. $f = \sigma_t \circ \sigma_r \circ \sigma_s$

Osserviamo che il primo di questi casi è da escludere perché f non ha punti fissi; il secondo caso è possibile solo se t e r sono due rette parallele e questo significa che f è una traslazione. Il terzo caso resta da analizzare e lo vedremo più avanti (cfr. 3.8).
In ogni caso, siamo in grado di descrivere una qualsiasi isometria del piano nel modo seguente.

Proprietà 9

Una qualsiasi isometria del piano diversa dall'identità è descrivibile come composizione di al più tre riflessioni.

3.7 Orientazione

Una proprietà che può permettere di distinguere tra loro le tipologie di isometrie è il loro comportamento rispetto all'*orientazione*.
Possiamo dare un'idea intuitiva di questa proprietà in questo modo: se prendiamo tre punti non allineati del piano A, B e C possiamo percorrere il contorno del triangolo ABC seguendo proprio l'ordine A, B, C. In questo modo il contorno del triangolo viene percorso in un certo verso, in senso orario oppure in senso antiorario. Quanto applichiamo l'isometria e facciamo la stessa cosa con i punti $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ può succedere che il verso di percorrenza resti lo stesso oppure cambi. Nel primo caso diciamo che f *conserva l'orientazione*, nel secondo caso diciamo che f *inverte l'orientazione*.
È possibile verificare che

- id, le rotazioni e le traslazioni conservano l'orientazione;
- le riflessioni invertono l'orientazione.

È anche possibile verificare che

- Se f e g conservano l'orientazione, allora $f \circ g$ conserva l'orientazione.
- Se f e g invertono l'orientazione, allora $f \circ g$ conserva l'orientazione.

- Se una tra f e g conserva l'orientazione, mentre l'altra inverte l'orientazione, allora allora $f \circ g$ inverte l'orientazione.

È utile applicare le proprietà appena enunciate a prodotti di riflessioni, in quanto abbiamo appena visto che ogni isometria del piano è esprimibile come composizione di al più tre riflessioni.

- Se f è composizione di un numero pari di riflessioni, allora f conserva l'orientazione.
- Se f è composizione di un numero dispari di riflessioni, allora f inverte l'orientazione.

3.8 Il caso mancante

I risultati fin qui ottenuti ci hanno portato a concludere che una qualsiasi isometria del piano diversa dall'identità è esprimibile come composizione di al massimo tre riflessioni. Sappiamo che cosa succede quando l'isometria f è il risultato della composizione di due riflessioni, ma resta aperto il caso lasciato in sospeso al termine di 3.6: f è una isometria che non ha punti fissi e che può essere scritta come composizione di tre riflessioni.

Proprietà 10

Se f è una isometria che è composizione di tre riflessioni e che non ha punti fissi, allora f è esprimibile come composizione di una riflessione e di una traslazione con la proprietà che l'asse della riflessione e il vettore della traslazione sono paralleli.

Possiamo ragionare in questo modo. Sia P un punto qualsiasi del piano. Essendo f priva di punti fissi, si ha che $f(P) \neq P$. Sia allora H il punto medio del segmento $Pf(P)$ e consideriamo la rotazione $\rho_{H,180^\circ}$ di 180° attorno a H. Possiamo studiare l'isometria

$$g = \rho_{H,180^\circ} \circ f$$

È facile osservare che g è una isometria che inverte l'orientazione e che ha come punto fisso P. Il fatto di avere (almeno) un punto fisso significa che g può essere solo l'identità, una riflessione o una rotazione (cfr. 3.5). Il fatto di invertire l'orientazione riduce ulteriormente le possibilità: g può solo essere una riflessione rispetto a una retta r passante per P. Quindi

$$g = \sigma_r = \rho_{H,180^\circ} \circ f$$

da cui

$$f = \widehat{\rho_{H,180^\circ}} \circ \sigma_r = \rho_{H,180^\circ} \circ \sigma_r$$

L'ultimo sforzo consiste nell'osservare che se s e t sono due qualsiasi rette perpendicolari passanti per H si può scrivere

$$\rho_{H,180^\circ} = \sigma_s \circ \sigma_t = \sigma_t \circ \sigma_s$$

La scelta di queste s e t è completamente arbitraria (purché si scelgano due rette perpendicolari passanti per H), possiamo allora sceglierle in modo che s sia parallela a r (e in questo caso t è perpendicolare sia a s che a r). Con questa scelta di s e t possiamo scrivere:

$$f = \rho_{H,180^\circ} \circ \sigma_r = (\sigma_t \circ \sigma_s) \circ \sigma_r = \sigma_t \circ (\sigma_s \circ \sigma_r)$$

Essendo s e r due rette parallele, allora $\sigma_s \circ \sigma_r$ è una traslazione di vettore $\mathbf{v}$ e questo vettore $\mathbf{v}$ è perpendicolare a s e r, cioè è parallelo a t. Quindi

$$f = \sigma_t \circ \tau_{\mathbf{v}}$$

con t e $\mathbf{v}$ paralleli.
Questa tipologia di isometrie è il caso mancante nel nostro processo di classificazione delle isometrie.

Definizione 4

Chiamiamo *glissoriflessione* una isometria che è esprimibile come composizione di una riflessione σ_r e di una traslazione $\tau_{\mathbf{v}}$ con r e $\mathbf{v}$ paralleli.

È facile verificare che la condizione che r e $\mathbf{v}$ siano paralleli permette anche di commutare il prodotto, cioè

$$\sigma_r \circ \tau_{\mathbf{v}} = \tau_{\mathbf{v}} \circ \sigma_r$$

Esercizio interattivo 12

WIMS : Glissoriflessioni: data una retta e un vettore paralleli, e quindi definita univocamente una glissoriflessione, determinare le immagini di alcuni punti del piano

Maggiori informazioni

Per effettuare effettivamente la costruzione sulla carta a quadretti potrebbe essere utile rivedere il Paragrafo 15.1 del libro di testo.

È utile osservare anche che, se sappiamo di avere a che fare con una glissoriflessione, ai fini dell'individuazione di questi r e $\mathbf{v}$ che la caratterizzano univocamente, la retta costruita nella nostra argomentazione passa per H, cioè per il punto medio del segmento $Pf(P)$, avendo preso un generico punto P nel piano. In altre parole la retta r ha la proprietà di passare per i punti medi dei segmenti che uniscono i punti del piano con le rispettive immagini (proprietà messa in evidenza dall'esempio all'inizio del paragrafo 3).

Esercizio interattivo 13

WIMS : Glissoriflessioni: dati due poligoni mandati l'uno nell'altro da una glissoriflessione individuare l'asse di questa glissoriflessione.

Le glissoriflessioni completano l'elenco delle tipologie di isometrie nel piano. Una isometria del piano diversa dall'identità è necessariamente di una delle quattro tipologie viste

- σ_r, riflessione rispetto alla retta r (composizione di "una" riflessione)
- $\rho_{O,\alpha}$, rotazione di angolo α attorno al punto O (composizione di due riflessioni)
- $\tau_{\mathbf{v}}$, riflessione di vettore $\mathbf{v}$ (composizione di due riflessioni)
- $\sigma_r \circ \tau_{\mathbf{v}} = \tau_{\mathbf{v}} \circ \sigma_r$, glissoriflessione di asse r e vettore $\mathbf{v}$ (composizione di tre riflessioni)

Alla luce di questi risultati potete rivedere l'esercizio 10. Potete anche rivedere gli esercizi qui di seguito.

Esercizio interattivo 14

WIMS : Isometrie e poligoni: dati due poligoni mandati l'uno nell'altro da una isometria, caratterizzare questa isometria.

Esercizio interattivo 15

WIMS : Composizione di isometrie: che isometria si ottiene componendo due isometrie?

Esercizio interattivo 16

WIMS : Composizione di isometrie: che isometria si ottiene componendo due isometrie?

3.8.1 Altre proprietà delle isometrie

Alla luce della classificazione delle isometrie, potete esplorare altre proprietà delle isometrie.

Esercizio interattivo 17

WIMS : Proprietà delle isometrie

Maggiori informazioni

In questo esercizio si considera una retta parallela a se stessa (cfr. esercizio 7 del capitolo 13 del libro di testo).

Esercizio interattivo 18

WIMS : Proprietà delle isometrie: rette invarianti

Maggiori informazioni

Le rette *invarianti* sono rette *fisse* ai sensi di quanto illustrato nel paragrafo 16.3.5 del libro di testo, cioè sono rette che vengono mandate in se stesse dall'isometria.

Credits

Le dimostrazioni contenute in questo documento si ispirano alla trattazione che potete trovare nel testo

M. Dedò, *Trasformazioni geometriche, con un'introduzione al modello di Poincare*, Zanichelli, Bologna, 1996.